【220】

氏名	翁(おう) 通(つう) 楹(えい)
学位の種類	工学博士
学位記番号	論工博第30号
学位授与の日付	昭和39年9月29日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**均質等方性乱流之統計理論**
論文調査委員	(主査) 教授 玉田　珖　教授 藤本武助　教授 神元五郎

論文内容の要旨

この論文は均質（又は一様）等方性乱流すなわち平均的性質が場所にも方向にもよらない最も単純な乱流の統計理論を展開したもので5章よりなっている。

第1章は序論で，乱流理論の沿革，均質等方性乱流の理論の意義第2章以下の内容の概略等を述べている。

第2章では乱流理論における重要な概念の一つである速度相関について考察し，その一般表式を導びいている。まず，一点におけるｉ方向（i=1.2.3）の速度成分 Ui と $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$ だけ離れた別の点におけるｊ方向（j=1. 2. 3）の速度成分 u'_j との積平均値 $\overline{u_i u'_j}(\mathbf{r})$ すなわち二重速度相関を Kármán-Howarth に従って考察し，これが結局縦相関 $f\propto\overline{u_i u'_j}(r,0,0)$ または横相関 $g\propto\overline{u_2 u'_2}(r,0,0)$ によって表わされることを示し，実験結果より $f(r), g(r)$ の形を推定している。さらに，2点における速度勾配の相関を考え，これが上記 $\overline{u_i u'_j}$ の微分によって表わされることを示し，その結果から，粘性によるエネルギー逸散率が $\partial^2 f/\partial r^2|_{r=0}$ と結ばれることを示している。次に三重相関 $\overline{u_i u_j u'_k}$ 等を同様にとりあつかい，結局これが特殊なスカラ三重相関 $h(r), k(r), q(r)$ の何れか一つによって完全に記述されることを示している。著者はさらに四重速度相関 $\overline{u_i u_j u'_k u'_l}$ 等を Robertson の Invariant theory にもとづいてとりあつかい，これを5個の特殊なスカラ四重相関で表わす式を導びいている。そして u_i, u_j, u'_k, u'_l の結合確率分布が正規分布であるときになりたつ四重二重両相関の間の関係を，四重相関に対する一つの近似仮定（準正規分布の仮定）として採用するとき，$\overline{u_i u_j u'_k u'_l}$ 等は $f(r), g(r)$ によって表わしうること，その結果がほぼ実験と一致することを確かめている。なお Invariant theory を用いれば前記の二重，三重相関の表式がきわめて簡単に求められることをも指摘している。

第3章では速度相関とその Fourier 変換の意義を論じている。まず G. I. Taylor に従い，一点における主流方向の速度変動 U(t) を調和成分に分解し，時間間隔 τ を隔てた速度相関 $\overline{u(t)u(t+\tau)}$ を上記調和成分で表わす式を求め，各調和成分の $\overline{u^2}$ への寄与（一次元スペクトル）と縦相関 $f(r)$ とが互に

Fourier cosine 変換の関係にあることを述べている。ついで前記の二重相関 $\overline{u_i u'_j}(\mathbf{r})$ の Fourier 変換としてスペクトルテンソル $\phi_{ij}(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K}$ は波数ベクトル) を定義し，単位質量あたりの運動エネルギー $\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ への各波数からの寄与 $E(K)$ (三次元スペクトル) と縦相関 $f(r)$ とがまた互に Fourier 変換に似た可逆関係で結ばれることを示している。そして $E(K)$ の $K=0$ におけるm次微係数が f の積分モーメント $\int_0^\infty r^m f(r)dr$ で表わされ，逆に $f(r)$ の $r=0$ における微係数が $\int_0^\infty K^m E(K)\,dK$ と結びつけられることを述べている。三重相関 $\overline{u_i u_j u'_k}(\mathbf{r})$ に対しても同様にその Fourier 変換としてスペクトル関数 $\Gamma ijk(\mathbf{K})$ を導入することができ，これからスカラ三重相関 $k(r)$ に対応する三次スペクトル $\Gamma(K)$ を導びきうることを述べている。

第４章では，前の2章で準備した結果を用いて乱流の動力学的考察を述べている。すなわちまずNavier-Stokes 方程式に適当な平均操作を施こすことにより，二重相関 $f(r,t)$ と三重相関 $k(r,t)$ の時空変化を記述する方程式 (Kármán-Howarth の方程式) を導びいている。またこれに対応するスペクトル方程式 ($E(K), \Gamma(K)$ を含む) をも求めている。次に N.S. 方程式の回転をとり，適当な平均操作を施こすことにより，渦度の自乗平均の時間変化を支配する微分方程式を導びき，その結果から渦度が渦線の伸長によって強まり，粘性によって減衰することを明らかにしている。そして渦度の増幅度は $\partial^3 k/\partial r^3|_{r=0}$ に比例することを見出している。またこの微分方程式に実験結果を加味すると，乱流減衰の初期においては渦度の自乗平均平方根は時間に逆比例して減少すること，乱流の Reynolds 数が充分大きいときには渦度の発生率と消滅率はともにその差 (正味変化率) に比べてきわめて大きいこと等が推論される。次に K.H. 方程式から，適当な条件の許に Loitsiansky の積分 $\overline{u^2}\int_0^\infty r^4 f(r)\,dr$ が時とともに不変であることが示されるが，著者はさらに $f(r)>0, k(r)<0$ の実験事実を参照して，正整数 m に対する $\overline{u^2}\int_0^\infty r^m f(r)\,dr$ の増減およびこれに対応する一次元スペクトルの原点微係数の増減を推定している。次に著者は K.H. 方程式の自己保存解 ($f_0''=-\lambda^{-2}$ とするとき f や k が $\psi\equiv r/\lambda$ だけの関数として解ける場合) の可能性を調べている。その結果によると，(a) Loitsiansky 不変量の存在をみとめれば，乱流の Reynolds 数 $R_\lambda\equiv\lambda\sqrt{\overline{u^2}}/\nu$ (ν は動粘性係数) が充分小さく，慣性項 ($k(\psi)$ に関係する) が無視できるような場合 (減衰末期) にだけ，$f(\psi)=\exp(-\psi^2/2)$ のような自己保存解が可能である。そしてこのとき乱流は $\overline{u^2}\propto t^{-5/2}$ のように減衰する。また Loitsiansky 不変量を考慮外におけば (b) $R_\lambda=$一定と仮定することにより $f(\psi)$, $k(\psi)$ に対する一つの常微分方程式がえられ，特に $R_\lambda\ll 1$ の場合には (再び $k(\psi)$ を含む項を無視して) $f(\psi)$ を決定することができる。この場合の減衰則は $\overline{u^2}\propto t^{-1}$ である。さらに，(c) Sedov に従い，R_λ と λ の間に実験結果を加味した一つの関係を仮定すると，$f(\psi), k(\psi)$ の両方を決定することができ，特に $R_\lambda\ll 1$ の場合には(b)と同一の $f(\psi)$ が得られる。実験によれば乱流の減衰過程の初期においては，$\overline{u^2}\propto t^{-1}$, $\lambda^2\propto t$ したがって，$R_\lambda=$一定であり，これは前記の自己保存解 (b) に相当する。しかし解(b)は Loitsiansky の積分を不変にしないので，結局，解(b)は r の全範囲ではなく，$0>r>l$ の限られた範囲でのみ適用するものと著者は解釈している。減衰末期における自己保存解(a)は実験的にも確かめられており問題はない。なお著者は減衰末期における解をスペクトル方程式から再考し，特に大きい渦 (波数小) の永続性による減衰末期の乱流の非等方化の傾向を指摘している。

第５章においては圧力場の統計的性質を論じている。すなわちまず N.S. 方程式の発散をとって平均操

作を施こすことにより，二点における圧力相関 $\overline{pp'}$ を速度の四重相関 $\overline{u_i u_j u'_k u'_l}$ と結びつける式を求め，ついで第2章の結果によりこれを二重相関 $f(r)$ で表わす公式を導びいている。そして減衰末期の $f(r)$（既述）の与える具体的結果，および乱流 Reynolds 数が非常に大きいとき r のある範囲でなりたつと考えられる Kolmogoroff の $f(r)$ の与える具体的結果に言及している。さらに，$\overline{u_i u_j u'_k u'_l}$ に対する第2章の結果を用いて圧力相関を特殊四重相関で表示する一般式を誘導し，この結果に準正規分布の仮定を適用すると再び前記の公式が得られることを確かめている。

最後に圧力相関の Fourier 変換について対応する計算を行ない，エネルギスペクトル $E(K)$ と結びつける表式を導びいている。

論文審査の結果の要旨

乱流現象は流体力学の中で最も難かしい問題の一つとされているが，同時にこれは日常広く経験する重要現象でもあるので，これまで実用計算のために経験，観測にもとづく現象論や半実験式が数多くつみ重ねられて来た。しかしこの現象の純理論的解明の問題は近代流体力学において大きい努力が払われたにも拘わらず，道なお遠い現状である。

この論文は Taylor に始まり，Kármán，Heisenberg，Batchelor 等によってひきつがれた均質（または一様）等方性乱流（統計的性質が場所にも方向にもよらない最も単純な乱流）の統計理論をさらに発展させたものである。すなわち著者はまず基本概念の一つである速度相関（異なる点における速度成分の積平均値）をとりあげ，特に Robertson の Invariant theory に基づく新しい方法を用いて四重相関（4個の速度成分の積平均）までの表式を比較的容易に導びくとともに，速度相関の Fourier 変換を導入してスカラ相関とエネルギスペクトルの間の関係等を明らかにしている。次に乱流の動力学に進み，まず Navier-Stokes の方程式に適当な平均操作を施こして，二重および三重の基本速度相関の伝播（時空変化）を記述する方程式を導びき，またこれに対応するスペクトル方程式をも求めている。さらに N. S. 方程式から渦度の自乗平均の時間変化を支配する式を導びき，渦度の減衰機構において渦線の伸長による増幅作用がきわめて重要であることなどを指摘している。次に著者は相関の伝播方程式の自己保存解（距離の尺度を時間に応じて適当に変えると解の形が不変になる）の可能性を調べ，完全な自己保存解は乱流 Reynolds 数がじゅう分小さくなった減衰末期においてのみ可能であること，また限られた領域で自己保存性をもつ解が存在し，これは実験と比較すると，減衰初期に対応するものであることなどを明らかにしている。最後に著者は二点の圧力相関を論じている。すなわち N. S. 方程式の統計処理から圧力相関を四重速度相関で表現し，既に得た関係を利用して面倒な計算を行ない，これを数個の基本四重相関で表わすことに成功し，さらにその結果に準正規分布の仮定を導入して，結局ただ1個の二重相関による表式にまで到達している。また圧力相関の Fourier 変換についても対応する公式を導びいている。

以上を要するに本論文は流体の乱流現象の理論的解明に正面から取り組み，乱流を流体の偶然運動とする一貫した立場に立って複雑な数学的解析を遂行し，種々の新知見を確立して均質等方性乱流の統計理論を発展させたもので，学術上，工業上寄与する所が少なくない。よって本論文は工学博士の学位論文として価値あるものと認める。